

# Введение в вейвлет-анализ

## 1. Непрерывные вейвлет-преобразования.

Поясним, что такое вейвлет-преобразование и почему оно оказывается необходимым, когда есть такие хорошо известные методы, как [преобразование Фурье](#).

Последнее обладает существенным недостатком: базисные функции такого разложения - множество синусов и косинусов различных частот, которые отличны от нуля на всей числовой прямой. Это приводит к двум основным проблемам при анализе сигналов:

- для получения информации даже об одной частоте требуется вся временная информация, т.е. даже будущее поведение сигнала должно быть заранее известно.
- большинство реальных сигналов нестационарно и пики во временной области сигнала дают вклад во всю частотную область.

Эффективность вейвлет-анализа в сравнении с преобразованием Фурье объясняется большей информативностью первого из них, предоставляющего исследователям дополнительную степень свободы для анализа в виде возможности видеть разложение сигналов по компактным базисным функциям не только при различных масштабах (частотах), но и при различных сдвигах по времени, что позволяет локализовать временные особенности сигнала.

Таким образом, одномерное вейвлет-преобразование сигнала  $f(x)$  является двумерной функцией:

$$W_{\psi}(a, b)f = \frac{1}{\sqrt{C_{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi \left( \frac{b-x}{a} \right) f(x) dx, \quad (1)$$

где ядро  $\Psi$  называется вейвлетом,  $b$  - смещением,  $a$  - масштабом или шкалой. Нормирующий коэффициент равен

$$C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (2)$$

где  $\tilde{\Psi}(\omega)$  -- фурье-образ вейвлета  $\Psi$ . Условие  $C_{\psi} < \infty$  является условием существования вейвлета.

Свобода в выборе базисных функций  $\Psi_{a,b}(x)$  позволила ввести многие типы вейвлетов. Часто в качестве вейвлетов используют производные функции Гаусса

$$\Psi(x) = g_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n > 0,$$

с нормирующим коэффициентом  $C_g = 2\pi(n-1)!$ , называемые поэтому **гауссовыми вейвлетами**. На рис. 1 изображен один из гауссовых вейвлетов

второго порядка  $g_2$ , называемый «Мексиканская шляпа», который особенно популярен в приложениях.

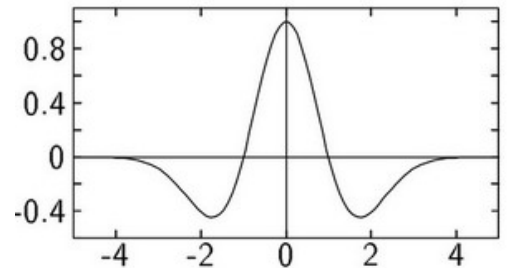


Рис.1. Гауссов вейвлет второго порядка

Возможности вейвлет-фильтрации сигнала сложной комбинированной формы наглядно демонстрируется на рис.2-5. Исходный сигнал, изображенный на рис.2., состоит

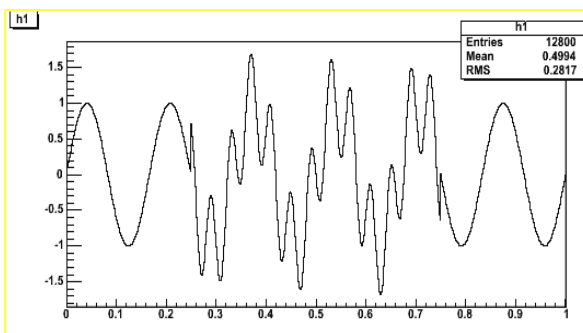


Рис.2. Исходный сигнал

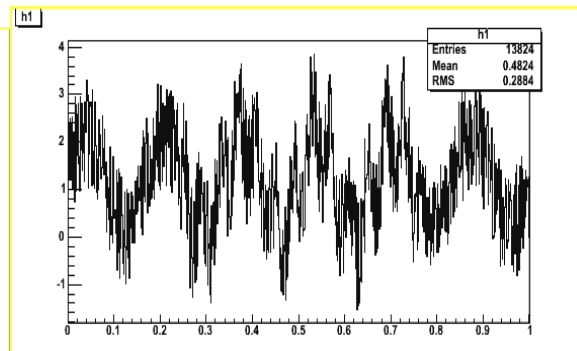


Рис.3. Зашумленный сигнал

из комбинации низкочастотных колебаний с локальным высокочастотным пакетом. На рис.3 показан результат зашумления этого сигнала гауссовым шумом с 20%-й амплитудой. Двумерный вейвлет-спектр результирующего сигнала при применения гауссового вейвлета  $g_2$  показан на рис.4. Большие по значению вейвлет-коэффициенты изображены точками большей светлости, меньшие – более темными.

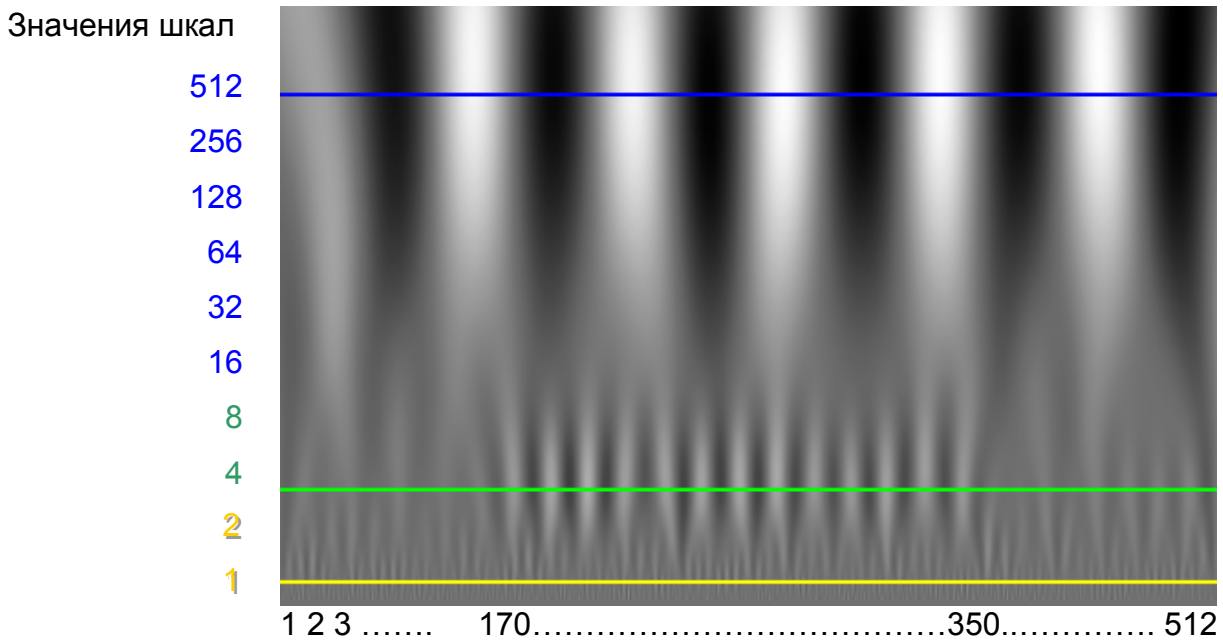


Рис.4 Вейвлет-спектр сигнала с рис.3.

По вертикали отложен масштаб (частота), по горизонтали – временной сдвиг. Горизонтальные линии отмечают хорошо различимые области шумовых колебаний (внизу) в средней области виден высокочастотный пакет, а выше – низкочастотная составляющая сигнала. Используя частоты, можно легко разделить вейвлет-спектр на шумовую, и низкочастотную части, а применив дополнительно пороговое обрезание по амплитудам пикселей, можно выделить ту часть которая порождена высокочастотным пакетом. Выполняя обратное преобразование, мы осуществим фильтрацию исходного сигнала, представленного на рис.3, от шумов и отделение низкочастотной части сигнала от высокочастотного пакета (см. рис.5.).

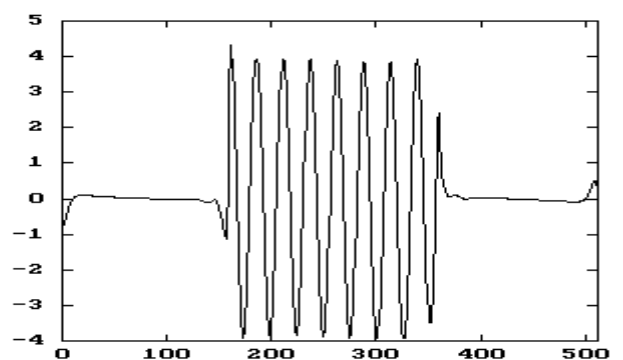
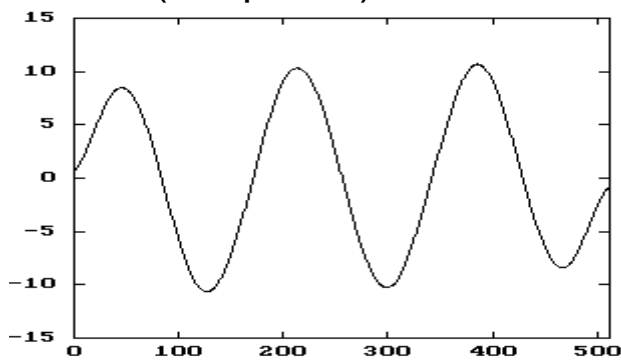
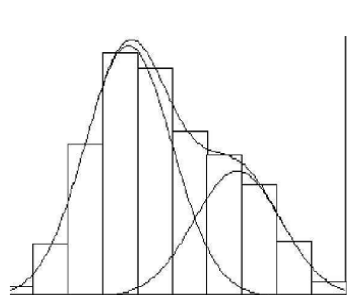


Рис.5

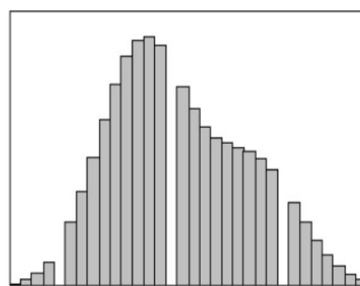
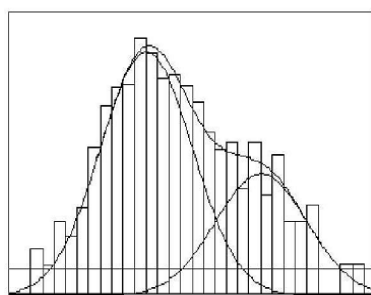
Отметим, что Фурье-анализ этого примера не позволил бы локализовать границы высокочастотного пакета, а выдал бы только сведения о его частоте.

Следует также указать, что при практической реализации вейвлет-анализа на компьютере непрерывное вейвлет-преобразование по необходимости должно быть дискретизовано, причем умелая дискретизация с учетом как шага дискретности измерений сигнала, выбора шага интегрирования так и конечности множества, на котором задан базисный вейвлет, дает возможность значительно (на несколько порядков) ускорить вычисление полного набора вейвлет-коэффициентов.

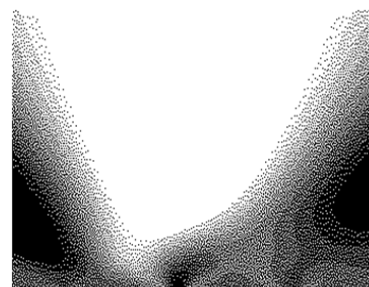
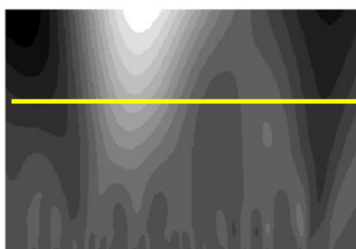
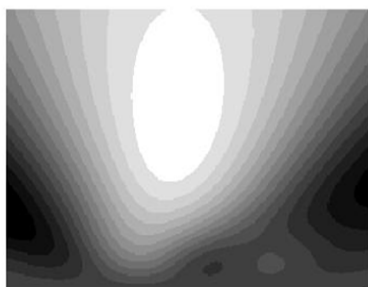
## Нечувствительность вейвлет-спектров к дисторсиям сигналов



Различие в грануляции и зашумленности



пропуски данных



Вверху – сигналы, внизу - соответствующие им вейвлет-спектры

### Важное свойство гауссовых вейвлетов

Вейвлет-преобразование с помощью гауссова вейвлета от гауссиана

$$g(x; A, x_0) = A \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right).$$

будет иметь вид того же гауссова вейвлета, но с другими параметрами. Например, для  $G_2$

$$W_{G_2}(a, b)g = \frac{Aa^{\frac{5}{2}}\sigma}{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}} G_2\left(\frac{b - x_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

Это позволяет после аппроксимации сигнала с помощью гауссиана (или нескольких гауссианов) находить параметры сигнала  $x_0$ ,  $\sigma$  и  $A$  прямо в вейвлет-пространстве без использования обратного преобразования, искажающего значения этих параметров.

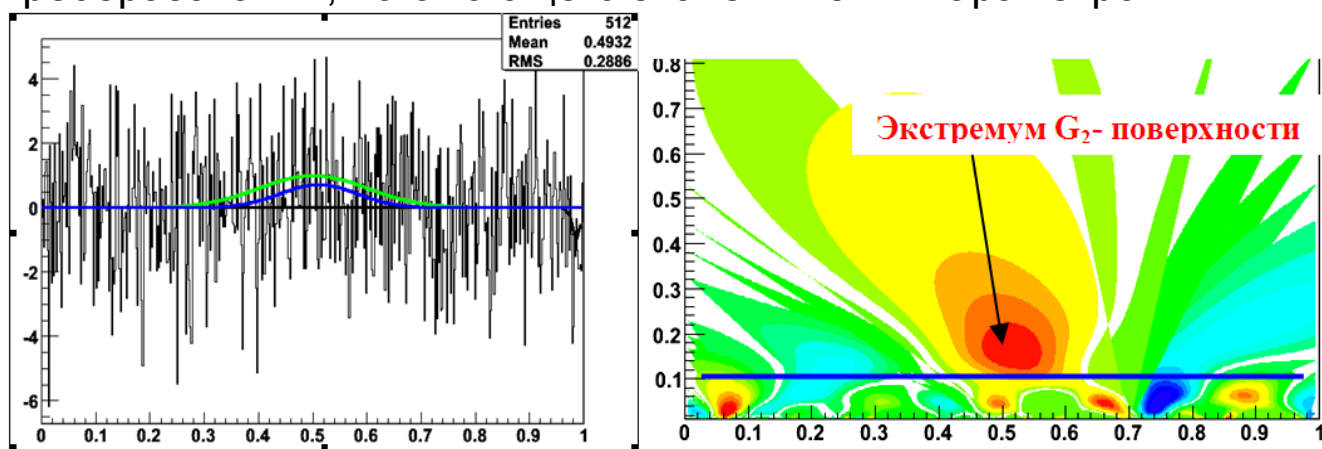


Рис. Пример применения Гауссовых вейвлетов для распознавания пиков в зашумленном сигнале

## 2. Дискретные вейвлет-преобразования.

Казалось бы, что идеальный инструмент анализа сигналов любого вида получен. Но, к сожалению, концепция непрерывного вейвлет-преобразования обладает своими недостатками. Главный из них – **неортогональность** непрерывных вейвлетов, что ведет к искажению сигнала после применения обратного вейвлет-преобразования. Кроме того, параметры в  $a$  и  $b$  формуле (5) меняются непрерывно, что приводит к **избыточному представлению спектра** сигнала. В некоторых задачах это несомненно является плюсом, т.к. благодаря своей избыточности, спектры непрерывного преобразования достаточно наглядны. Однако платой за эту избыточность является сравнительно **невысокая скорость** выполнения преобразования, требующая вычисления интегралов для каждого из значений обоих параметров  $a$  и  $b$ . Следует также учесть, что на практике **все сигналы**, с которыми имеют дело физики, и не только физики, **имеют дискретную природу**, используемую при их компьютерном представлении. Поэтому применение нецелых значений масштабов вейвлета оказывается явно нецелесообразным. Таким образом, мы видим, что более употребительной при компьютерных вычислениях с реальными данными должны быть **дискретные вейвлет-преобразования - ДВП**.

Формула для дискретного вейвлет-преобразования может быть получена из (1) в предположении, что **a, b** принимают только

дискретные значения:  $a = a_0^m$ ,  $b = nb_0 a_0^m$ , величины  $a_0 > 1$ ,  $b_0 > 0$  - фиксированные.

$$W_{\psi}^{m,n}(f) = |a_0|^{-m/2} \int dt f(t) \psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad (4).$$

Разные значения  $m$  соответствуют разной ширине вейвлетов, поэтому узкие (высокие частоты) вейвлеты сдвигаются малыми шагами, чтобы покрыть весь временной спектр, в то время как более широкие (низкие частоты) вейвлеты сдвигаются большими шагами. Соответствующие вейвлеты с дискретными индексами выглядят как

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0).$$

Однако из-за требования ортогональности ДВП получение формулы для ДВП не сводится к простой замене интеграла (4) на суммирование по индексам  $m$  и  $n$ , а приводит к сложной задаче кратномасштабного анализа в иерархической системе вложенных непересекающихся функциональных пространств, решение которой было предложено Малла (Mallat) и Добеши.

При каждом шаге разложения, сглаженная версия сигнала, разлагается на новую, еще более сглаженную версию. Каждый из массивов в половину меньше предыдущего. Итерируя эту процедуру, получаем разложение, похожее на спектр непрерывного вейвлет-разложения.

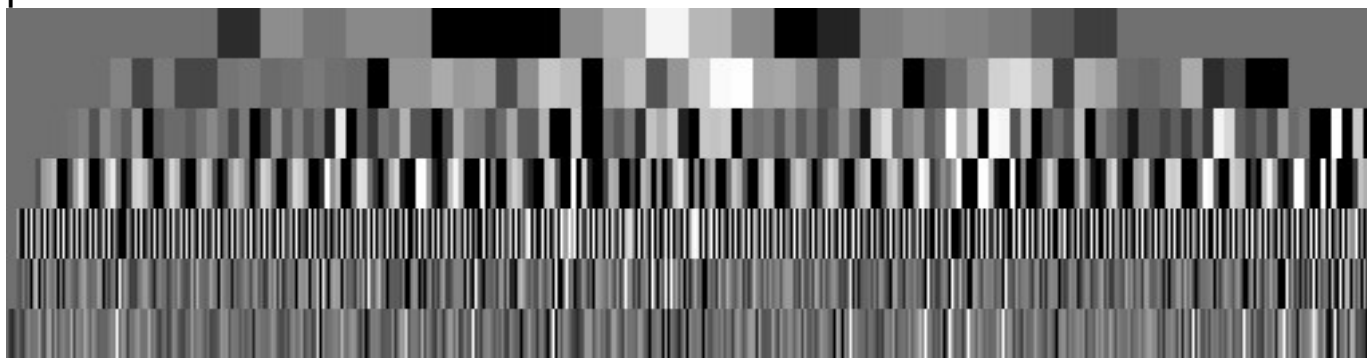


Рис. Пример спектра ДВП

Критериями для выбора вейвлетов могут служить, например, желание получить разложение по симметричным и ортогональным вейвлет-функциям. К сожалению, доказано, что все, за исключением простейшего вейвлета Хаара, ортогональные наборы вейвлетов несимметричны.

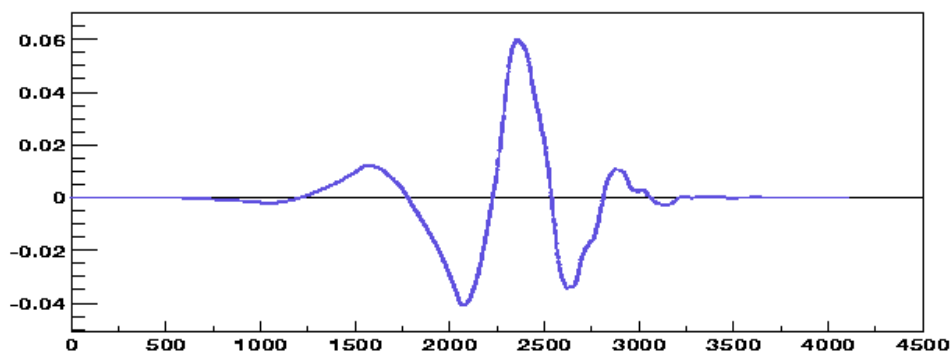


Рис. Функция из семейства Добеши-вейвлетов

Максимально симметричными из семейства ортогональных вейвлетов являются так называемые **Коифлеты**.

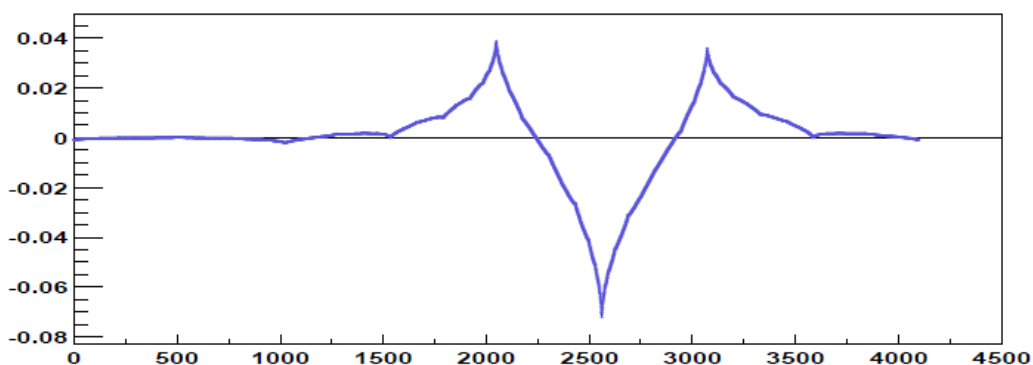


Рис. Коифлет – наиболее симметричный из ДВП

### Обработка с помощью Добеши-вейвлетов

Преобразование смоделированного сигнала, представляющего собой выборку длиной  $N = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , происходит в три этапа:

- а) Прямое вейвлет-преобразование с разложением до  $n$ -го уровня ( $n_{\max} = k - 2$ ).
- б) Отбрасывание на каждом  $j$ -м уровне вейвлет-коэффициентов  $W_{j,i}$ , для которых выполняется условие:  $|W_{j,i}| < T_j$ , где  $T_j$  – порог обрезания  $j$ -го уровня, определяемый сравнением вейвлет-коэффициентов исходного и зашумленного сигналов на данном уровне.
- в) Восстановление сигнала с помощью обратного вейвлет-преобразования.

### Лифтинг - вейвлеты

Лифтинг схема - это наиболее простой подход к построению вейвлет-разложения, предложенный Швелденсом. При этом один шаг разложения сигнала в вейвлет-спектр осуществляется в три



этапа: **Разделение, Предсказание и Обновление**. Мы будем рассматривать самое простое преобразование, относящееся к так называемому Lazy (ленивому)-вейвлету. В этом случае этапы преобразования состоят в следующем.

1) **Разделение**: Сигнал  $c_k^0$  делится на четные и нечетные компоненты:  $c_k^0 \rightarrow (c_{2k}^0; c_{2k+1}^0)$ .

2) **Предсказание**: Сначала осуществляется предсказание компонент  $P(c_{2k+1}^0)$  и затем вычисляются вейвлет-коэффициенты  $d_k^1$ , как разности между истинными и предсказанными значениями нечетных компонентов. Предсказания  $P(c_{2k+1}^0)$  можно получить из тех соображений, что при сильной корреляции исходного сигнала нечетные компоненты оказываются близки к среднему значению двух соседних четных компонентов (линейная аппроксимация):

$$P(c_{2k+1}^0) = \frac{1}{2}(c_{2k}^0 + c_{2k+2}^0). \text{ Тогда } d_k^1 = c_{2k+1}^0 - \frac{1}{2}(c_{2k}^0 + c_{2k+2}^0).$$

3) **Обновление**: На двух предыдущих этапах вместо набора  $c_k^0$  фактически были получены грубое приближение  $c_{2k}^0$  и поправки  $d_k^1$ , необходимые для точного восстановления исходного сигнала. Во многих случаях бывает важно, чтобы некоторые статистические параметры исходного сигнала не изменялись в процессе его преобразования. Для этого производится соответствующая модификация грубого приближения. Например, чтобы среднее значение сигнала сохранялось неизменным, используется следующая процедура перерасчета четных компонентов:

$c_k^1 = c_{2k}^0 + \frac{1}{4}(d_{k-1}^1 + d_k^1)$ . Для граничных компонентов, у которых нет двух соседних нечетных соседей, в качестве недостающего элемента используют элемент периодически продолженной копии сигнала, либо элемент сигнала, полученного с помощью зеркального отражения от границы.

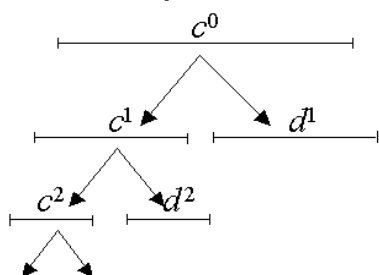


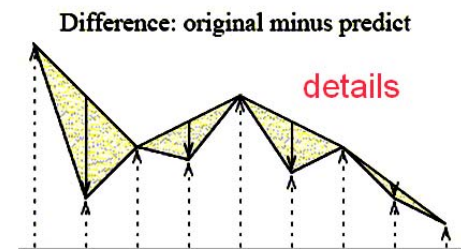
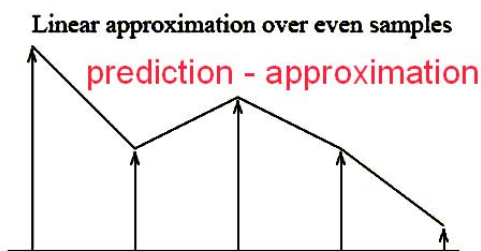
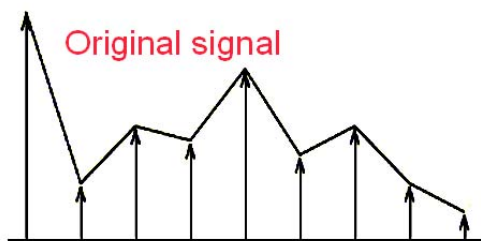
Рис. Схема разложения



Набор компонентов  $c_k^1$ , полученный после одного шага вейвлет-преобразования, является грубым приближением первого уровня. Этот набор в свою очередь может быть разложен на грубое приближение второго уровня  $c_k^2$  и набор соответствующих поправок  $d_k^2$  и так далее до тех пор, пока позволяет длина сигнала. Совокупность уровней вейвлет-коэффициентов  $d_k^1, d_k^2, \dots$  называют вейвлет-спектром. С увеличением номера уровня на единицу его длина сокращается в 2 раза, а соответственно в 2 раза уменьшается и частотная характеристика, представляемая этим уровнем.

По аналогии с прямым, обратное вейвлет-преобразование по лифтинг-схеме осуществляется по тем же самым формулам лишь с заменой порядка вычисляемых компонентов.

## Лифтинг-схема как пример ДВП



### Алгоритм:

- Разбиваем на четные - нечетные
- Предсказываем и получаем детали
- Запоминаем  $s_k$  и  $d_k$  "in place"
- продолжаем итеративно

требование: размер выборки должен быть степенью 2 ( $2^n$ )

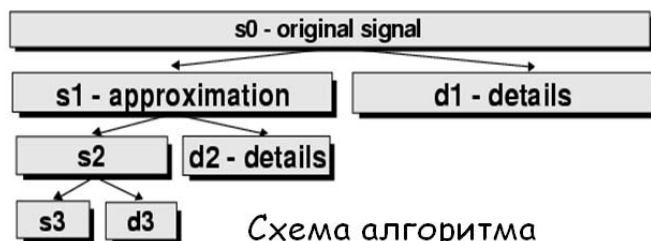
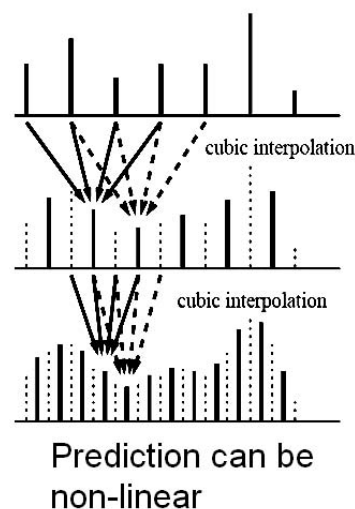
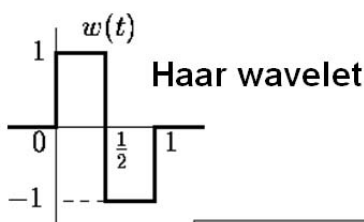


Схема алгоритма разложения

Как видно, схема лифтинга, предложенная Швелденсом, легко допускает итерационную процедуру, кроме того разложение с использованием лифтинг-схемы в пределе примерно в два раза эффективнее по количеству проводимых операций.

Важной особенностью алгоритма является еще и то, что вычисления производятся без выделения дополнительной памяти (in place).

## Применение ДВП для почастотного сжатия сигналов (вейвлет-шринкинг)

Вейвлетное почастотное сжатие – это техника шумоподавления, основанная на идее порогового обрезания коэффициентов вейвлет-разложения на каждой базовой частоте. Вейвлет-коэффициенты, имеющие малое абсолютное значение, кодируют главным образом шумовые и очень мелкие детали сигнала. Напротив, важная информация кодируется коэффициентами, имеющими большое абсолютное значение. Удаление малых коэффициентов и затем обратное преобразование сигнала должно произвести сигнал с меньшим количеством деталей и шума.

Таким образом, алгоритм почастотного вейвлет-сжатия (wavelet shrinkage) состоит из следующих шагов:

1. Применить к сигналу вейвлет-преобразование.
2. Оценить величины порогов для каждой частоты разложения.
3. Занулить вейвлет-коэффициенты, которые меньше порога.
4. Восстановить сигнал (применить обратное вейвлет-преобразование).

Самая трудная проблема в подходе почастотного вейвлет-сжатия состоит в **вычислении значений порогов, соответствующих каждой частоте**. Известны некоторые статистические методы для оценки порогов. Обычно используют **универсальный порог**, который является простой мерой энтропии, зависящей исключительно от числа пикселей в изображении:  $\lambda = \sqrt{2 \cdot \log(N)}$ , где  $N$  - число пикселей в изображении и  $\lambda$  – значение порога. В предположении, что проанализированный сигнал содержит шум, универсальный порог должен быть далее отъюстирован. Энтропия в шумном сигнале выше, чем в сигнале без шума. Поскольку точные отношения между шумом и ростом энтропии не известны, мы предложили вычислять порог  $\lambda$  с учетом гауссовости распределения шумовых вейвлет-коэффициентов, т.е. использовать множитель, полученный вычислением выборочного среднеквадратичного значения  $\sigma$ .

Другой открытый вопрос в алгоритме шринкинга - **как применить порог**. Существуют два основных общепринятых правила порогового обрезания вейвлет-коэффициентов:

$$1) \text{ «жесткое» (hard thresholding): } w \rightarrow w_t = \begin{cases} 0, & |w| \leq \lambda, \\ w, & |w| > \lambda. \end{cases}$$

$$2) \text{ «мягкое» (soft thresholding): } w \rightarrow w_t = \begin{cases} 0, & |w| \leq \lambda, \\ \text{sign}(w)(|w| - \lambda), & |w| > \lambda. \end{cases}$$

Здесь  $\lambda$  - значение порога обрезания (threshold value), выбираемое обычно в процентах от стандартного отклонения вейвлет-коэффициентов данного уровня (см.рис.1.).

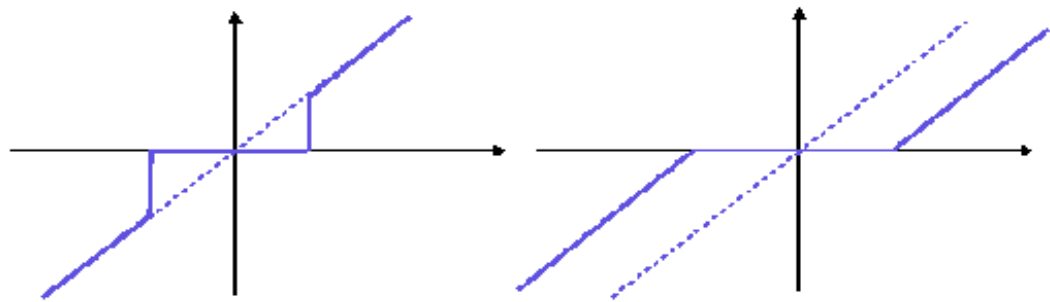


Рис. 1. «Жесткое» (слева) и «мягкое» (справа) пороговое обрезание.

Так называемое *жесткое* пороговое обрезание превращает в ноль коэффициенты, которые являются меньшими, чем порог, и оставляет другие неизменными. Напротив, *мягкая пороговая обработка* изменяет остающиеся коэффициенты, чтобы формировать непрерывное распределение коэффициентов, сосредоточенных вблизи нуля.

Новый **адаптивный подход** к выбору порогов для обрезания малых вейвлет-коэффициентов состоит в выборе порога  $\lambda$  как функции **уровня вейвлет-разложения**  $k$  и среднеквадратичного значения вейвлет-коэффициентов в этом уровне:  $\lambda_k = \mu \sigma_k$ , при этом используется *жесткое* пороговое обрезание. На основе этого подхода разработан программный пакет **Waveshr**, в меню которого можно выбирать 4 параметра шринкинга:

1. размер выборки (степень 2),
2. порядок вейвлета (используются вейвлеты Добеши),
3. число уровней вейвлет-разложения, подвергаемых шринкингу,
4. множитель  $\mu$ , на который умножается  $\sigma_k$ .

Примеры применения пакета *Waveshr* для сглаживания различных реальных сигналов приведены на рисунках внизу

## Пример очень нестационарного сигнала

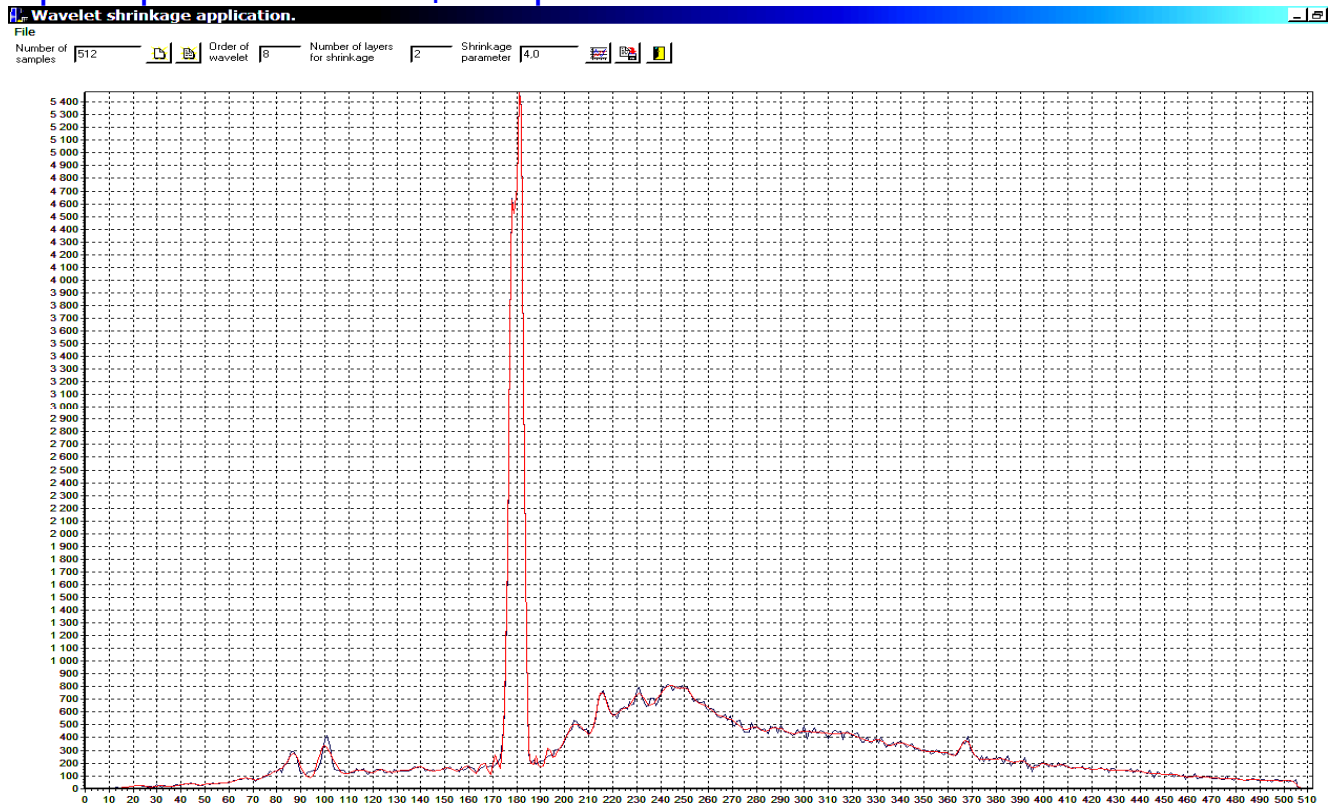
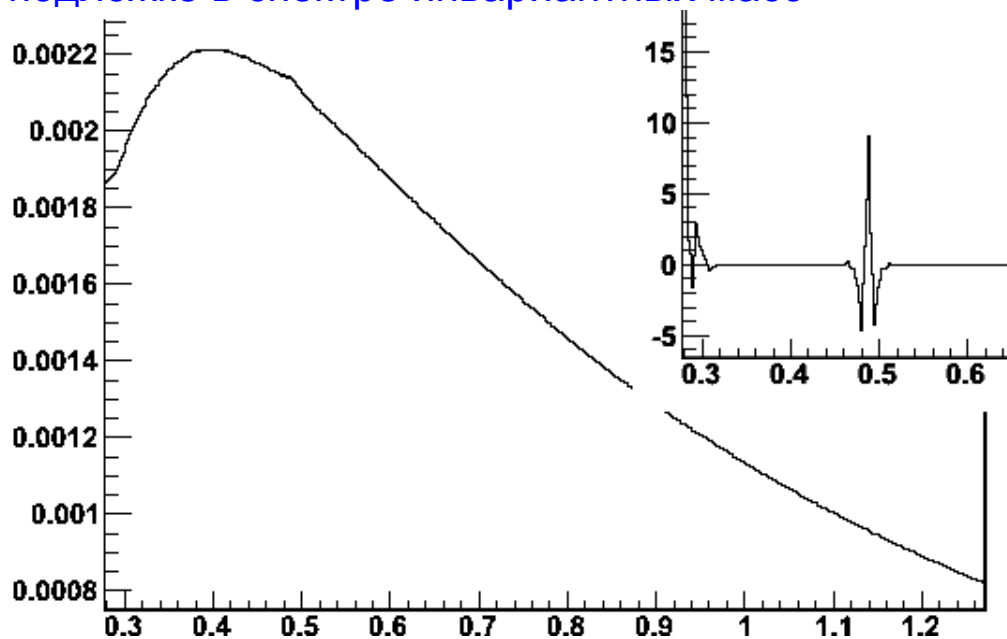
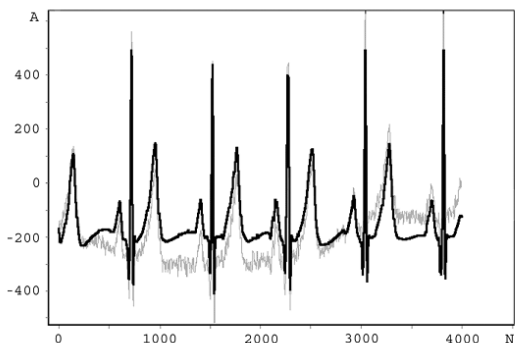


Рис. Применение `Waveshr` для сглаживания зашумленного сигнала с острым пиком. Синим показан исходный сигнал, красным – после сглаживания. На врезке дан увеличенный фрагмент сигнала на участке от 200 до 260.

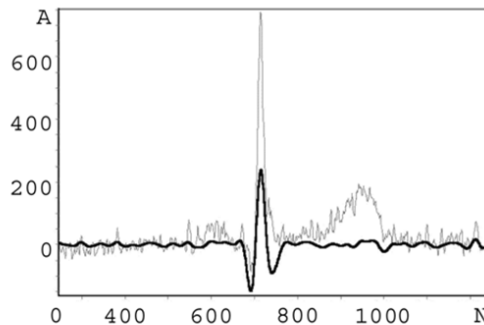
## Пример локализации малого пика на большой зашумленной подложке в спектре инвариантных масс



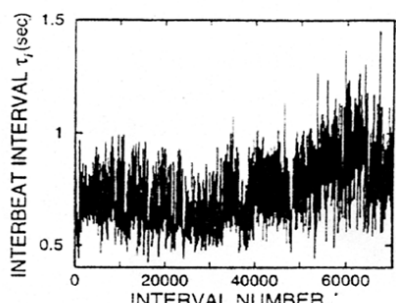
# Применение вейвлет-анализа к обработке электрокардиографических данных



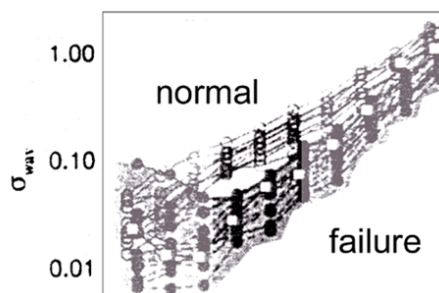
Шумоподавление и устранение подложки



Выделение значимых пиков



Среднеквадр. величина  $\sigma_{\text{wav}}(m)$  на различных масштабах  $m$  не зависит от вида вейвлета, но отличается для здоровых и инфартников!



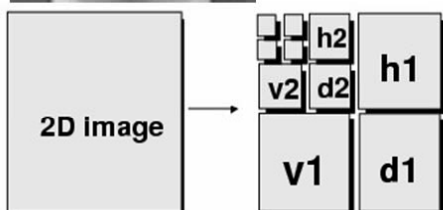
Интервалы сердечных сокращений

$$\sigma_{\text{wav}}(m) = \sqrt{\frac{1}{1-N} \sum_{n=0}^{N-1} [W_{m,n}^{\text{wav}}(s) - \langle W_{m,n}^{\text{wav}}(s) \rangle]^2}$$

# Двумерные дискретные вейвлеты



Быстрое 2D- Добеши ДВТ примененное к изображению и его результат



Для получения 2D-вейвлет преобразования суммируют три одномерных разложения – вертикальное, горизонтальное и диагональное.

примеры применения 2D ДВТ к изображениям лиц.





# Сжатие изображений



Фото Ингрид Добечи, восстановленное после вейвлет-сжатия до 3% от оригинала



Сжатие отпечатков пальцев позволяет хранить в базе данных только 2% исходных изображений



Оригинал

Восстановление после сжатия 26:1

## Сжатие изображений 2



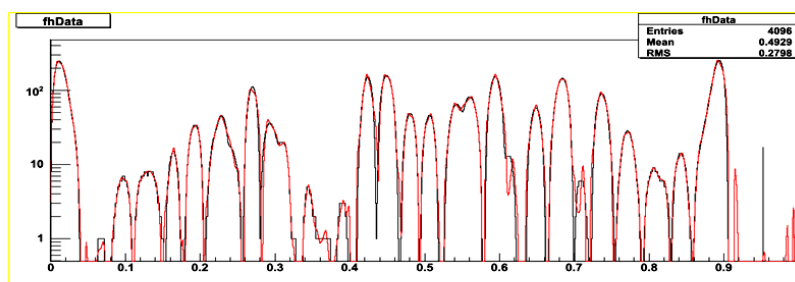
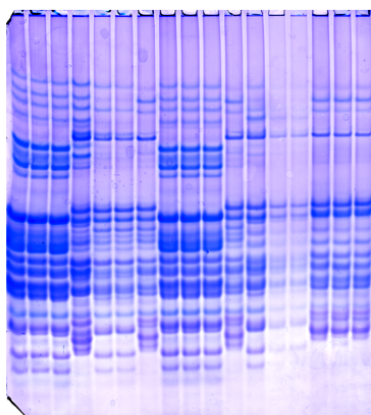
Исходное фото



вейвлет-сжатие 80:1



JPEG-сжатие



Задача классификации белков по их генетическому спектру: вейвлет-сжатие 4096  $\rightarrow$  256 решило проблему ввода в нейронную сеть.