Лекция 7

Клеточные автоматы

Клеточный автомат — дискретная динамическая система, представляющая собой совокупность одинаковых клеток, одинаково соединенных между собой. Все клетки образуют так называемую решетку клеточного автомата. Эти правила предписывают изменения состояния каждой клетки в следующем такте времени в ответ на текущее состояние соседних клеток, а также, возможно и ее самой. В общем случае клеточные автоматы обладают следующими свойствами.

- **Изменения значений всех клеток происходят одновременно** после вычисления нового состояния каждой клетки решетки.
- **Решетка однородна** - невозможно различить какие-либо две области решетки по ландшафту.
- **Взаимодействия локальны.** Лишь клетки окрестности (как правило, соседние) способны повлиять на данную клетку.
- **Множество состояний клетки конечно.**

Алгоритм клеточных автоматов

1. *Вводятся* ***два массива*** *для хранения состояний клеток: первый из них содержит текущее состояние каждой клетки, второй предназначен для хранения нового ее состояния.*
2. *Определяется функция переходов клетки решетки. Для выявления следующего ее состояния в качестве параметров в функцию переходов передаются текущие значения состояний клеток окрестности, возможно, включая ее саму. На нулевом шаге решетка (первый массив) заполняется начальными данными, что полностью определяет поведение системы для выбранных решетки и функции переходов клетки..*
3. *Для вычисления новых состояний вводится цикл. На каждой итерации для любой клетки, используя в качестве переменных элементы первого массива, определяется ее новое состояние, помещаемое во второй массив. Значения*

аргументов функции переходов берутся из первого массива.

4. *Поскольку у клеток, обрамляющих решетку нехватает соседей, решетка свертывается в **тор**, т.е. краевые строки и столбцы обрамляются дубликатами строк (столбцов) с противоположной стороны, состояния клеток в которых обновляются в каждом цикле.*

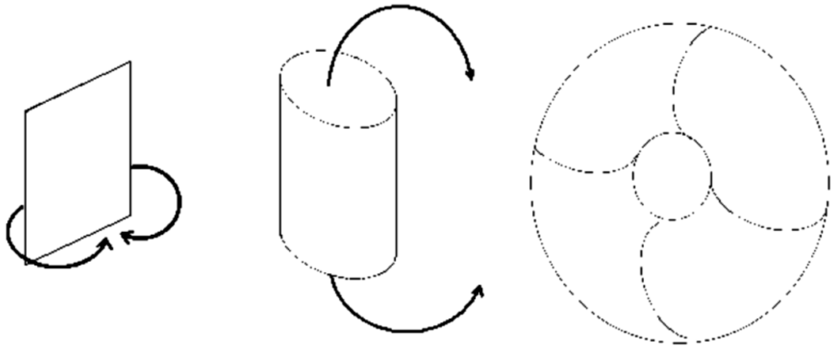


Рис. 7. Схема образования тора

5. *По завершении итерации значения из всех элементов второго массива переносятся в первый, что обеспечивает синхронное изменение значений состояний всех клеток решетки.*
6. ***Визуализируется содержимое решетки**. В зависимости от ее размерности (одномерная или двумерная) отображение решетки производится по-разному.*
   5.1. Для одномерной (линейной) решетки после каждой итерации выводится соответствующая ей строка. Их расположение одна под другой позволяет наблюдать динамику системы во времени (ось времени направлена вертикально вниз).
   5.2. Для двумерной (плоскостной) решетки в каждый момент времени отражается результат лишь последней итерации. Последовательный переход от одной итерации к другой позволяет наблюдать динамику системы.

Игра «Жизнь»

Впервые, идея таких автоматов отмечена в работах Дж.Фон Неймана в 1940-х годах, когда он работал над идеей саморепродуцирующихся машин. Вплоть до конца 60-х идея клеточных автоматов была забыта и лишь в 1970 Джон Конвей, математик Кембриджского университета, описал ныне широко известный двумерный клеточный автомат, названный Игра "Жизнь" (**The game of Life**).

Игра разыгрывается на двумерном массиве во избежание краевого эффекта, ***свернутом в тор****. Каждая клетка может быть в одном из двух состояний: клетка может быть "живой" (на экране - черной) или "мертвой" (на экране - белой).*

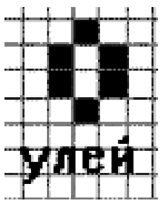
Правила эволюции автомата в игре «Жизнь»*:*

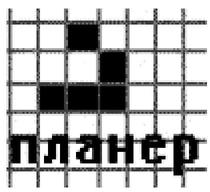
1. ***Выживание:*** *если клетка в текущем моменте времени жива, то в следующем такте времени она будет жива в лишь в том случае, если две или три из восьми соседних клеток живы в текущем такте времени.*

2. ***Гибель:*** *В противном случае (одиночество или перенаселение), клетка погибает.*

3. Рождение: *Если клетка мертва, то в следующем такте времени она оживает тогда и только тогда, если ровно 3 соседние клетки живы в текущем такте времени. В противном случае клетка остается мертвой.*

Если в качестве начального состояния установить случайное распределение живых и мертвых клеток, запустить модель и проследить за ее эволюцией, то можно увидеть следующее:





Часть структур стабилизируются и не изменяются во времени (как «улей» на рис. слева), часть претерпевают циклические изменения («мигалка-блинкер» на рис. в центре), и, наконец, некоторые развиваются, не повторяясь, практически неограниченное время («планер» на рис. справа).

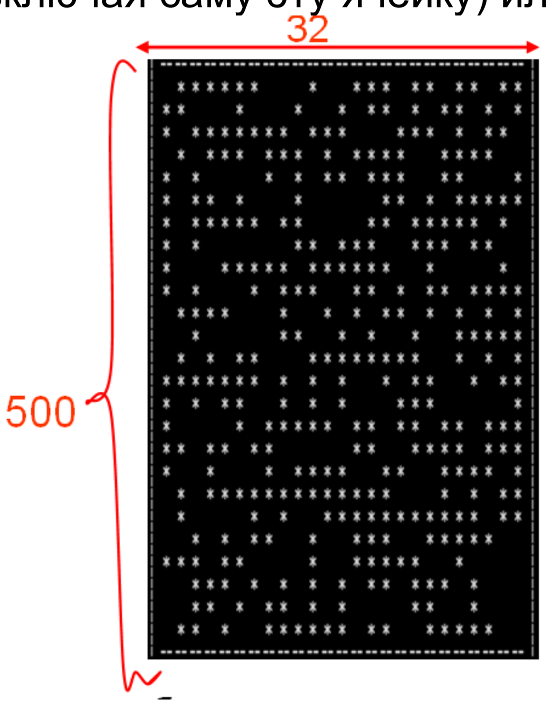
Если вы наберете в поисковике https://life.written.ru/ , То попадете на сайт, где можно играть он-лайн и скачать эту игру себе

2D клеточный автомат для генерации случайных векторов

На решетке 32*500 строится 2D клеточный автомат, каждая ячейка которого определяется по своим соседям по формуле:

$$\phi_1(i,j) = \left(\sum_{i'=i-1}^{i+1}\sum_{j'=j-1}^{j+1} c_{i'j'}\right) mod\ 2 \qquad (1)$$

т.е. в ячейку засылается ноль при четном числе соседей (включая саму эту ячейку) или 1 при – нечетном.



Решетка сворачивается в тор для выполнения граничных условий.
Ячейки вначале случайно засеваются нулями и единицами. Потом на каждую эволюцию КА по формуле (1) получаем 500 32-значных случайных числа, образующих 500-мерный случайный вектор с равномерным распределением.
Использовалось для вычислений по квантовой хромодинамике (КХД).

Одномерные клеточные автоматы

В одномерном бинарном (значения +1 или 0) клеточном автомате решетка представляет собой цепочку клеток (одномерный массив), в которой для любой из них, кроме крайних, имеется по два соседа. Для устранения краевых эффектов решетка «заворачивается» в одномерный тор, т.е. кольцо, что позволяет для всех клеток автомата использовать следующие соотношения:

y'[i] = f(y[i-1], y[i], y[i+1]),
где *f* — функция переходов клетки;
y'[i] — состояние *i*-й клетки в следующий момент времени;
y[i-1] — состояние *(i-1)*-й клетки в данный момент времени;
y[i] — состояние *i*-й клетки в данный момент времени;
y[i+1] — состояние *(i+1)*-й клетки в данный момент времени.

Пример 1. Простейший генератор случайных чисел на базе одномерного клеточного автомата. Возьмем самую простую функцию переходов клетки такого вида:

y'[i] = y[i-1] ☺ y[i] ☺ y[i+1], (1)

где ☺ — символ логической операции «исключающее или» (сложение по mod 2). Засеем любым путем строку из 17 клеток случайными битами 0 или 1 и свернув ее в тор-кольцо, т.е. добавив *y(0)=y(17)* и *y(18)=y(1),* запустим эволюцию клеточного автомата. В каждом цикле в качестве псевдослучайного числа ***x*** из отрезка (0,1) выдаем $x = \sum_{i=1}^{17} 2^{-i} y(i)$. Полученную последовательность следует проверить на соотвествие гипотезе о равномерном распределении в отрезке (0,1) по критерию χ^2.

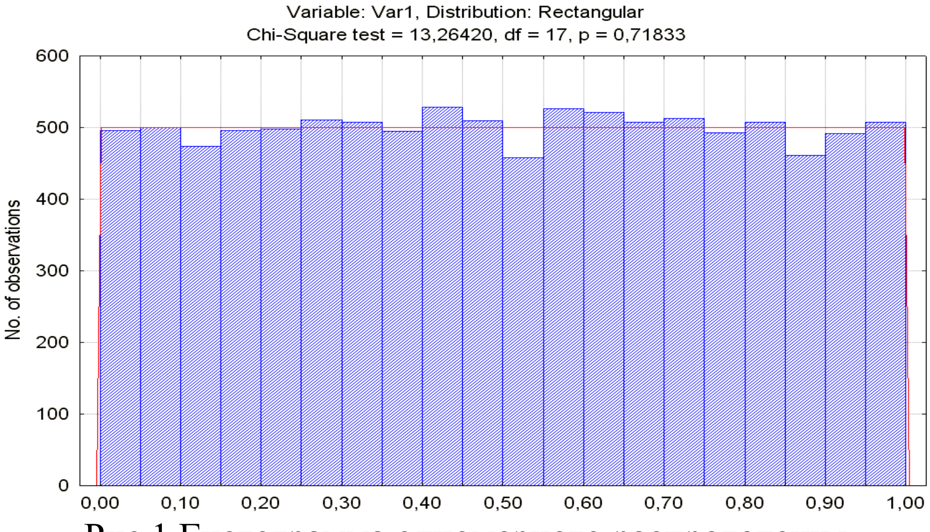


Рис.1 Гистограмма одномерного распределения

На приведенном примере видно, что одномерная последовательность распределена вполне равномерна и вычисленное значение критерия χ^2 =13,26 меньше критического уровня для 20 степеней свободы, равного 38. Заметим, что при гистограммировании на m ячеек в случае равномерного распределения, выражение критерия упрощается: $$\chi^2 = \frac{m}{n}\sum_{k=1}^{m} \nu_k^2 - n$$

Для проверки двумерной последовательности случайных точек (когда, к примеру, для получения n=1000 точек надо сгенерировать 2000 случайных чисел и выбирать их парами (x,y)) очень наглядно изобразить эти точки на двумерном графике, что позволяет сразу увидеть наличие зависимостей между ними. Например, для КА с простой функцией перехода (1) двумерный график выглядит следующим образом:

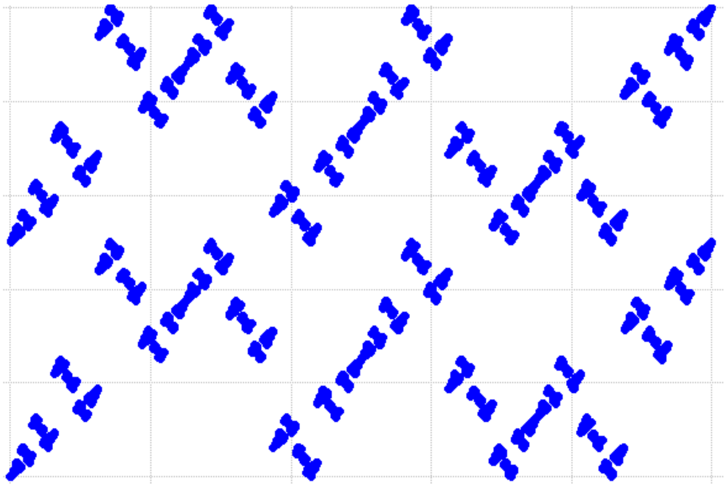


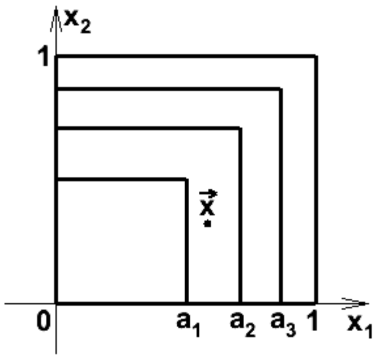
Рис.2. Двумерное распределение показывает наличие зависимости между координатами точек.

Проверка работы ГСЧ на равномерность распределения в многомерном кубе весьма усложняется из-за экспоненциального роста числа ячеек гистограммы с ростом размерности.

Однако есть возможность сохранить число ячеек гистограммы при любой размерности ***d*** случайного вектора, проверяемого на равномерность. Такое разбиение пространства называется **метод вложенных гистограмм**

Сущность этого метода удобно пояснить для случая ***d=2*** (двумерный квадрат).

Разделим единичный квадрат на m фигур (на рисунке ***m=4***) с одинаковой площадью ***S=1/m*** при помощи вложенных друг в друга квадратов, имеющих общую вершину в точке(0,0).



При этом сторона k-го квадрата будет равна $a_k = \sqrt{k/m}$.

Тогда попадание случайной точки $\vec{x} = (x_1;\, x_2)$ в ***k***-ю фигуру (т.е., в ***k*** -ю ячейку гистограммы) будет определяться неравенством:

$$a_k < \max\{x_1;\, x_2\} < a_{k+1},\quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

что в общем случае размерности *d* записывается как:

$$\sqrt[d]{k/m} < \max\{x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_d\} < \sqrt[d]{(k+1)/m}.$$

Выражая отсюда ***k,*** получаем, что адрес ячейки, которая должна быть увеличена на единицу при попадании в нее случайного числа $(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_d)$, выражается по формуле:

$$k = [m \cdot (\max\{x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_d\})^d],$$

где квадратные скобки означают, что берется целая часть числа.